08/01/2018

23º μάθημα

Άσκηση: Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ χρησιμοποιώντας τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου και του Simpson όταν η f δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	2	6

Λύση

$$Q_5^T = h\left(\frac{f(-2)}{2} + f(-1) + f(0) + f(1) + \frac{f(2)}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{2} + 0 + 0 + 2 + \frac{6}{2} = 6$$

$$Q_5^S = \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4f(-1) + 2f(0) + 4f(1) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 + 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2 + 6\right) = \frac{16}{3}$$

Άσκηση: Δοθέντος ότι η συνάρτηση f που δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	-2	-1	0	1	2	3
f_i	-15	-4	-1	0	5	20

, είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν ακριβώς οι τιμές των ολοκληρωμάτων $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int_{-2}^{3} f(x)dx$, $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$, χωρίς να βρεθεί η f.

Λύση

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4f(0) + f(2)\right) = \frac{2}{3}\left(-15 + 4\cdot(-1) + 5\right) = -\frac{28}{3}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = Q_3(f) + Q_4(f) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4(f(-1) + f(0)\right) + \frac{3h}{8}\left(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + f(0)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-15 + 4(-4) + (-1)\right) + \frac{3}{8}\left(-1 + 3\cdot 0 + 3\cdot 5 + 20\right)$$

$$= -\frac{32}{3} + \frac{51}{4} = \frac{153 - 128}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_{-2}^{3} f(x)dx - \int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{25}{12} - Q_3(f) =$$

$$= \frac{25}{12} - \frac{h}{3}\left(f(-1) + 4 \cdot f(1) + f(3)\right) =$$

$$= \frac{25}{12} - \frac{2}{3}\left(-4 + 4.0 + 20\right) = \frac{25}{12} - \frac{32}{3} = \frac{25-128}{12} = \frac{-103}{12}$$

Ασκηση: Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^1 xe^x dx$ πρόκειται να εφαρμοστούν οι σύνθετοι τύποι Τραπεζίου και Simpson. Τι n πρέπει να πάρουμε για την κάθε περίπτωση ώστε να εξασφαλίζεται ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων;

Λυση

$$R_{n+1}^{T} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

$$R_{n+1}^{S} = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

$$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad \max_{0\le x\le 1} |f''(x)| = \max_{0\le x\le 1} (x+2)e^x = 3e$$

$$f'''(x) = (x+3)e^x$$

$$f''''(x) = (x+4)e^x \qquad \max_{0\le x\le 1} |f^{4}(x)| = \max_{0\le x\le 1} (x+4)e^x = 5e$$

$$|R_{n+1}^{T}| = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}|f''(\xi)| \le \frac{1}{12n^2}\cdot 3e = \frac{e}{4n^2} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \iff$$

$$\iff n^2 \geq \frac{2e}{4} 10^6 \iff n \geq \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot 10^3 \simeq 1165.8$$

Το μικρότερο δυνατό n είναι 1166

$$|R_{n+1}^{S}| = \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{n^4}|f^{(4)}\xi| \le \frac{5e}{180 \cdot n^4} = \frac{e}{36n^4} \le \frac{1}{2} 10^{-6} \iff$$

$$\iff n^4 \geq \frac{e}{18}\cdot 10^6 \iff n \geq \sqrt[4]{\frac{e}{18}\cdot 10^6} = 19.71$$

Το μικρότερο δυνατό είναι 20.

Άσκηση : Είναι γνωστό ότι $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ και $\pi = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Να γίνει η εκτίμηση του σφάλματος των σύνθετων τύπων του Τραπεζίου και του Simpson για τις δύο περιπτώσεις και να γίνει αν είναι δυνατόν η εκτίμηση του n για την προσέγγιση του π με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.
Να γίνει εφαρμογή του αλγορίθμου με υποδιπλασιασμό διαστήματα των σύνθ. τύπων Τραπεζίου και Simpson.
Με ποιο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται καλύτερα ο π ;

Λύση

$f(x) = \frac{4}{1+x^2} = 4(1+x^2)^{-1}$

$f'(x) = -8(1+x^2)^{-2}\cdot x$

$f''(x) = 8(1+x^2)^{-3}\cdot(3x^2-1)$ $\quad \max_{0\le x\le 1}|f''(x)| = f(0) = 8$

$f'''(x) = -96(1+x^2)^{-4}\cdot(x^3-x)$

$f^{(4)}(x) = 96(1+x^2)^{-5}\cdot(5x^4+10x^2+1)$

$f^{(5)}(x) = -960(1+x^2)^{-6}(3x^5-10x^3+x)$

$f'''(x)=0 \iff x^3-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$|R^T_{n+1}| = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}|f''(\xi)| \le \frac{2}{3n^2} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{6}$

$\iff n^2 \ge \frac{4}{3}\cdot 10^6 \iff n \ge \sqrt{\frac{4}{3}}\cdot 10^3 = 1154,7$

Το μικρότερο δυνατό n είναι 1155

Ο Αλγόριθμος βρήκε με ακρίβεια 6 δ.ψ. για $n=1024=2^{10}$ Στο 0 έχουμε μέγιστο

$f^{(5)}(x)=0 \iff x(3x^4-10x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1/3 \\ x^2=3 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$

$\max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)| = f(0) = 96$

$|R^S_{n+1}| = \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{n^4}|f^{(4)}(\xi)| \le \frac{96}{180n^4} = \frac{8}{15n^2} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \iff$

$\Leftrightarrow n^4 \geq \frac{16}{15} \cdot 10^{-6} = \sqrt[4]{\frac{16}{15} \cdot 10^{-6}} = 32.137$

Το μικρότερο δυνατό n είναι 34.

Ο αλγόριθμος τρέχει με ακρίβεια 6 δεκαδικών για $n = 1024 = 2^{10}$ έδωσε $n = 16 = 2^4$

$$f(x) = 2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \cancel{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \infty$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| = \infty$$

2º συμπλήρωμα

αλγόριθμος τραπεζίου $n = 65536 = 2^{16}$

Simpson $n = 32768 = 2^{15}$